第２講　極限

2 ［A］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(2) $y=e^{2x}$ の $x=a_n$ における接線と x 軸の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

第２講　極限

2　［A］　次の極限を求めよ．

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$

（4）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}$

（5）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

［B］　次の各問いに答えよ．

（1）　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

（2）　$y=e^{2x}$ の $x=a_n$ における接線と x 軸の交点の x 座標を a_{n+1} とする．$a_1=1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ を求めよ．

【答】　［A］（1）　$\dfrac{1}{2}$　　（2）　∞　　（3）　2　　（4）　1　　（5）　∞

［B］（1）　2　　（2）　$-\dfrac{1}{2}$

【解説】　［A］（1）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x^3+x^2+1}{2x^3-x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^3+x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}=\infty$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2}{\frac{\tan x}{x}}=2$

（4）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1$

（5）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\left\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\right\}=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-1)=\infty$

［B］（1）　$a_{n+1}=a_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ より 2 以上の n に対して

$\displaystyle a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=1+\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となるので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = 2$$

(2)　$y=e^{2x}$ より $y'=2e^{2x}$ であるから $x=a_n$ における接線は $y=2e^{2a_n}(x-a_n)+e^{2a_n}$ となる．

これが $(a_{n+1},\ 0)$ を通るので $0=2e^{2a_n}(a_{n+1}-a_n)+e^{2a_n}$ つまり $a_{n+1}-a_n=-\dfrac{1}{2}$ を得る．

これと $a_1=1$ より $a_n=a_1+(n-1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{2}$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2n}\right) = -\frac{1}{2}$$